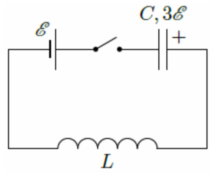
Урок №11 (22.10.2019)

Решение олимпиадных задач на электрические колебания.



1. В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа конденсатор был заряжен до напряжения 3ε. Ключ замыкают.
   a. Найдите максимальный ток в цепи.
   b. Найдите ток в момент, когда заряд на конденсаторе равен нулю.
   c. Найдите заряд на конденсаторе в момент времени, когда сила тока в цепи становится равной нулю.

   Все элементы можно считать идеальными. (Всеросс., 2012, регион, 11, «Физтех», 2014)

Решение.

Решим задачу тремя способами: 1) прямым, через решение дифференциального уравнения, 2) через механический эквивалент. 3) «читерским», через графики.

1 способ, прямое решение уравнения.

Запишем закон Ома, предполагая, что ток в цепи идёт по часовой стрелке. Напряжение на конденсаторе складывается из напряжения от батареи и противо-ЭДС индукции:

$U_C = \varepsilon + U_L$, где

$U_C = \dfrac{q}{C}$, считаем заряд на левой обкладке конденсатора, со стороны батареи;

$U_L = -L\dfrac{dI}{dt} = -L\ddot{q}$.

Получаем дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q - \frac{\varepsilon}{L} = 0.$$

Ищем решение в виде $q(t) = q_0\cos\omega t + Q$, где $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$.

Подставляем решение в уравнение:

$$-q_0\omega^2\cos\omega t + q_0\omega^2\cos\omega t + Q\omega^2 - \frac{\varepsilon}{L} = 0,$$

откуда получаем, что $Q = \dfrac{\varepsilon}{L\omega^2} = \varepsilon C$.

Итак, в любой момент времени заряд на конденсаторе равен

$$q(t) = q_0\cos\omega t + \varepsilon C,$$

напряжение на конденсаторе равно

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = U_0\cos\omega t + \varepsilon.$$

Найдём U_0 из начальных условий. В начальный момент времени $t=0$ по условию напряжение на конденсаторе равно 3ε, следовательно

$$U_C(0)=3\varepsilon=U_0\cos(0)+\varepsilon,$$

откуда

$$U_0=2\varepsilon \text{ и } q_0=CU_0=2\varepsilon C.$$

Ответим теперь на вопросы задачи. Ток в цепи в любой момент времени равен $I(t)=\dot{q}(t)=-q_0\omega\sin\omega t=-\dfrac{2\varepsilon C}{\sqrt{LC}}\sin\omega t$.

Максимальный ток – $I_{\max}=2\varepsilon\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

Заряд на конденсаторе равен нулю в моменты времени, удовлетворяющие уравнению:

$$2\varepsilon C\cos\omega t-\varepsilon C=0,$$

$\cos\omega t=\dfrac{1}{2},\ \sin\omega t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, ток в цепи, когда заряд на конденсаторе равен нулю, будет равен

$$I=\pm 2\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}=\pm\varepsilon\sqrt{\frac{3C}{L}}.$$

Наконец, сила тока в цепи равна нулю в моменты времени, когда $\sin\omega t=0$, и $\cos\omega t=\pm 1$. В этот момент заряд на конденсаторе равен

$q=\pm q_0+\varepsilon C$, откуда следуют два решения

$$\begin{aligned} q_1&=-\varepsilon C\\ q_2&=3\varepsilon C \end{aligned}.$$

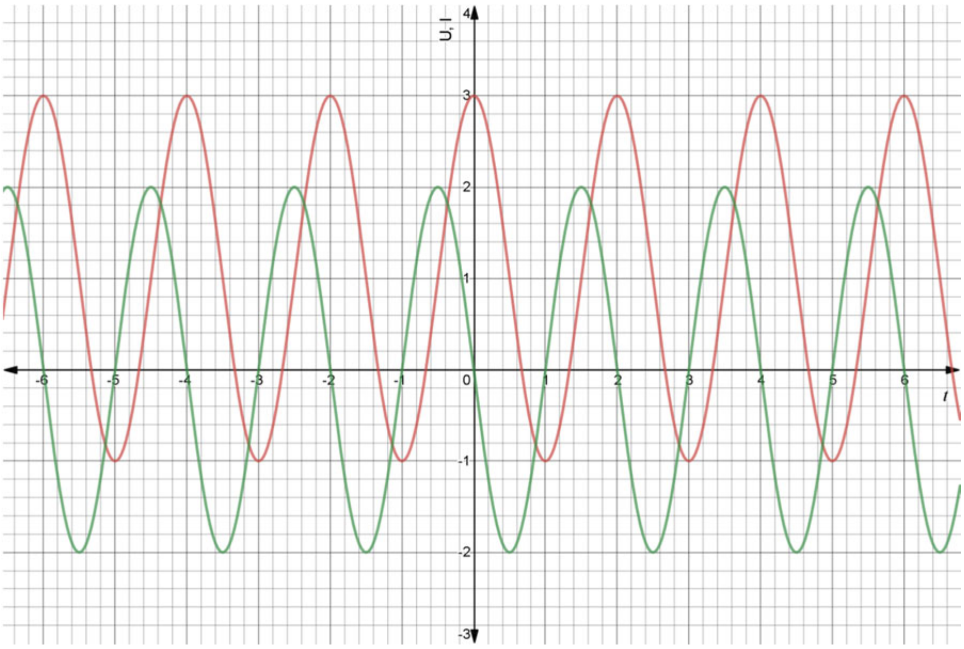
2 способ, механический эквивалент

Колебательный контур без активного сопротивления – это аналог груза, колеблющегося на пружине без трения. Наличие батареи соответствует наличию смещающей силы (например, mg). Заметим, что в начальный момент времени груз расположен так, что со стороны пружины на него должна действовать сила $3mg$, направленная вверх. Очевидно, что в этот момент груз начнёт двигаться вверх, достигнет максимальной скорости, когда пружина уравновесит силу тяжести, и далее, будет двигаться вверх, пока не остановится в симметричном состоянии, когда пружина действует на груз вниз с силой mg.

Далее задачу можно решить чисто механически (ток эквивалентен скорости груза и т.д.), но особого облегчения для ответов на второй и третий пункт задачи мы не получим.

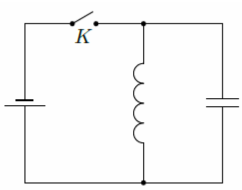
3 способ, через графики

Красный график – напряжение на конденсаторе, в единицах ε. Батарея смещает график вверх на 1ε (напряжение считается на конденсаторе положительным, если «+» находится на правой обкладке), в начальный момент напряжение 3ε.

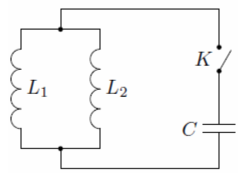


Зелёный график – ток в цепи. Из этих двух графиков можно найти всё остальное…

2. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и конденсатора, через ключ K подключён к источнику с постоянной ЭДС и внутренним сопротивлением r (см. рисунок). Первоначально ключ K замкнут. После установления стационарного режима ключ размыкают, и в контуре возникают колебания с периодом T. При этом амплитуда напряжения на конденсаторе в n раз больше ЭДС батареи. Найти индуктивность катушки и ёмкость конденсатора. Омическим сопротивлением катушки пренебречь. (*МФТИ, 1980*)

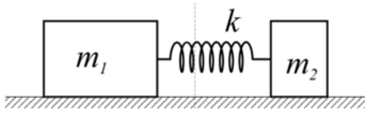


3. Конденсатор ёмкостью C, заряженный до разности потенциалов U, через ключ K подключён к двум параллельно соединённым катушкам индуктивностями L_1 и L_2 (см. рисунок). Если замкнуть ключ K, то через некоторое время конденсатор полностью перезарядится (напряжение на конденсаторе поменяет знак). Какие заряды q_1 и q_2 протекут через катушки за это время? Сопротивлениями катушек пренебречь. (*МФТИ, 1979*)



Решение.

Прежде всего, разберёмся в том, что происходит, используя механический эквивалент. Электрическая схема эквивалентна механической системе, изображённой на рисунке, где m_i соответствует L_i, а k соответствует $1/C$. Начальное условие означает, что в начальный момент времени пружина растянута (или сжата) на некоторую длину $_\Delta x_0$ так, что $k_\Delta x_0$ соответствует напряжению U, то есть $_\Delta x_0 = UC$.



Видно, что система будет колебаться относительно неподвижного общего центра масс.

Пусть длина пружины l_0. Обозначим длины частей пружин по разные стороны от центра масс через l_1 и l_2, так что $l_1 + l_2 = l_0$ и $l_1 m_1 = l_2 m_2$. Заметим, что $\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_2}{l_1}$ (но это нам не понадобится). Отношения длин характерны не только для частей нерастянутой пружины, но и для их удлинений.

Нам, фактически, надо найти, насколько сдвинутся левый и правый груз при полном сжатии пружины (сама пружина, очевидно, сожмётся на величину $2\Delta x_0$, что соответствует перезарядке конденсатора с U на $-U$).

Итак, полное изменение длины пружины равно $2\Delta x_0 = \Delta l_1 + \Delta l_2$, при этом $\Delta l_1 m_1 = \Delta l_2 m_2$. Откуда находим, что $\Delta l_1 = 2\Delta x_0 \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$ и $\Delta l_2 = 2\Delta x_0 \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$.

«Переводя» ответ на язык электричества, получаем:

$q_1 = 2UC\dfrac{L_2}{L_1 + L_2}$ и $q_2 = 2UC\dfrac{L_1}{L_1 + L_2}$.